

Lösungen zum Gk – Abitur 1996 / IV:

Geg.: 100 G – Karten, 100 N – Karten und 300 A – Karten, insgesamt also 500 Karten

$$1a) P(G) = \frac{100}{500} = \frac{1}{5} = 0,2$$

Zweimal Ziehen mit Rücklegen; gesucht: $P(\{(G;G)\})$ $\frac{1}{5}$ G $\frac{1}{5}$ G

$$P(\{(G;G)\}) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{25} = 0,04 = 4\%$$

1b) Bernoulli – Kette: Treffer: G – Karte, also $p = P(G) = 0,2$; Niete: keine G – Karte, $q = 1 - 0,2 = 0,8$

Gesucht: Anzahl n der mindestens nötigen Ziehungen

X bezeichne die Anzahl der G – Karten unter n gezogenen Karten

Die Bedingung aus dem Text („... um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99% mindestens eine Geschichtskarte zu erhalten“) lässt sich dann so schreiben:

$$P(X \geq 1) > 0,99$$

Über das Gegenereignis:

$$1 - P(X = 0) > 0,99$$

$\frac{0,8}{\text{Niete}}$ $\frac{0,8}{\text{Niete}}$ $\frac{0,8}{\text{Niete}}$... $\frac{0,8}{\text{Niete}}$

$$1 - 0,8^n > 0,99 \quad | -1$$

$$-0,8^n > -0,01 \quad | \cdot (-1)$$

Ungleichheitszeichen ändert sich:

$$0,8^n < 0,01 \quad | \ln$$

NICHT $\cdot \ln$ oder ähnliches!

$$n \cdot \ln 0,8 < \ln 0,01 \quad | : \ln 0,8$$

$\ln 0,8$ ist negativ \rightarrow Ungleichheitszeichen ändert sich:

$$n > \frac{\ln 0,01}{\ln 0,8} = 20,6\dots$$

$$\Rightarrow n = 21$$

Man muss also mindestens 21mal ziehen.

1c) Eine gezogene Karte kann eine G – Karte oder keine G – Karte sein (Bernoulliexperiment, weil genau zwei mögliche Ergebnisse!). Weil mit Rücklegen gezogen wird, liegt eine **Bernoullikette** der Länge $n = 200$ vor; als „Treffer“ legen wir hier am besten fest: „Keine G – Karte“ \rightarrow Trefferwahrscheinlichkeit: $p = 1 - 0,2 = 0,8$

Mit X bezeichnen wir – wie immer – die Anzahl der Treffer (die Anzahl der gezogenen Nicht – G - Karten).

\Rightarrow Gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$P(X \geq 150) = \sum_{i=150}^{200} B(200; 0,8; i) = \sum_{i=0}^{200} B(200; 0,8; i) - \sum_{i=0}^{149} B(200; 0,8; i)$$

$$= 1 - \sum_{i=0}^{149} B(200; 0,8; i) \approx 1 - 0,03450 = 0,96550 \approx 96,6\%$$

Den Zahlenwert 0,03450 liest man aus dem Tafelwerk ab.

2.) Nun: 3 G – Karten, 2 N – Karten und 5 A – Karten, insgesamt also 10 Karten

2a) Gesucht: Anzahl der verschiedenen Anordnungsmöglichkeiten in einer Reihe, also die Anzahl der **Permutationen mit gleichen Elementen** (siehe Formelsammlung S. 23, A.2.)

Lösung: Es gibt $\frac{10!}{3! \cdot 2! \cdot 5!} = 2520$ Möglichkeiten.

(Alternative Lösungsmöglichkeit:

Auswahl der Plätze in der Zehnerreihe in drei Schritten (z.B. zunächst für die Gruppe der G-, dann für die der N – Karten und schließlich für die der A- Karten), jeweils ohne Wiederholung und ohne Reihenfolge:

$$\binom{10}{3} \cdot \binom{10-3}{2} \cdot \binom{10-3-2}{5} = \binom{10}{3} \cdot \binom{7}{2} \cdot \binom{5}{5} = 2520$$

2b) Gesucht: Anzahl der verschiedenen Anordnungsmöglichkeiten in einer Reihe, wobei alle Karten aus den jeweiligen Fachgebieten nebeneinander liegen sollen Z.B.: |G G G|N N|A A A A A|

Man kann nur die **drei Blöcke** vertauschen, also gibt es $3! = 6$ Anordnungsmöglichkeiten.

2c) Zufallsexperiment: 2 aus 10 Karten **gleichzeitig** (also ohne Rücklegen) ziehen.

Ereignis C: „Die beiden gezogenen Karten gehören dem gleichen Fachgebiet an“

Gesucht: $P(C)$

Wir stellen uns die Ziehung auch ohne Beachtung der Reihenfolge vor (sehr naheliegend, aber nicht zwingend!):

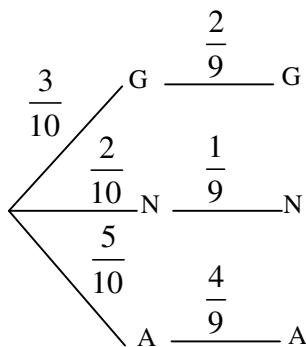
Mächtigkeit des Ergebnisraums: $|\Omega| = \binom{10}{2} = 45$

Nun zählen wir die für C günstigen Ergebnisse: $|C| = \binom{3}{2} + \binom{2}{2} + \binom{5}{2} = 3 + 1 + 10 = 14$

(Entweder wurden beide gezogenen Karten aus den 3 G – Karten ausgewählt oder aus den 2 N – Karten oder aus den 5 A – Karten.)

$$\Rightarrow P(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{14}{45} \approx 31,1\%$$

(Alternative Lösungsmöglichkeit: Ohne Rücklegen und mit Beachtung der Reihenfolge:



$$P(C) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} + \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{14}{45}$$

(Oder: $P(C) = \frac{3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 5 \cdot 4}{10 \cdot 9} = \frac{14}{45}$)

3.) p: Wahrscheinlichkeit für G – Karte

Nullhypothese H_0 : $p = 0,3$ (fehlerhaftes Spiel)

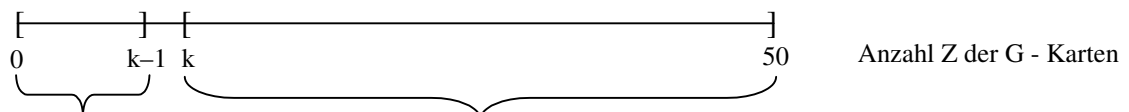
Alternative H_1 : $p = 0,2$ (kein fehlerhaftes Spiel) → Alternativtest

Nun zum Test, mit dem die Entscheidung getroffen werden soll:

Stichprobenumfang: $n = 50$

Testgröße Z: Anzahl der G – Karten unter den 50 gezogenen Karten

Die Nullhypothese wird laut Angabe angenommen, wenn mindestens k G – Karten unter den 50 gezogenen Karten gefunden werden; graphische Darstellung:



H_0 wird abgelehnt

H_0 wird angenommen

Ablehnungsbereich

$$\bar{A} = \{0; 1; \dots; k - 1\}$$

Annahmebereich

$$A = \{k; k + 1; \dots; 50\}$$

(Modell „Ziehen mit Rücklegen“ soll verwendet werden → Bernoullikette!)

3a) Geg.: $k = 12$

Gesucht: Wahrscheinlichkeit für eine irrtümliche Ablehnung der Nullhypothese (also α , das Risiko 1. Art)

$$\alpha = P(Z \in \bar{A}) \Big|_{p=0,3} = \sum_{i=0}^{11} B(50; 0,3; i) = 0,13904 \approx 13,9\%$$

(Wahrscheinlichkeit für höchstens 11 „Treffer“ beim Test, obwohl in Wirklichkeit $p = 0,3$ ist; den Zahlenwert findet man im Tafelwerk.)

3b) Gesucht: Max. k, sodass ein fehlerhaftes Spiel mit mind. 95 %iger Sicherheit auch als solches eingestuft wird

Fehlerhaftes Spiel $\rightarrow p = 0,3$ (Nullhypothese)

Spiel auch als solches eingestuft $\rightarrow Z \in A$

$$P(Z \in A) \Big|_{p=0,3} \geq 0,95$$

$$\sum_{i=k}^{50} B(50; 0,3; i) \geq 0,95$$

$$\sum_{i=0}^{50} B(50; 0,3; i) - \sum_{i=0}^{k-1} B(50; 0,3; i) \geq 0,95$$

$$1 - \sum_{i=0}^{k-1} B(50; 0,3; i) \geq 0,95 \quad | -1$$

$$-\sum_{i=0}^{k-1} B(50; 0,3; i) \geq -0,05 \quad | \cdot (-1)$$

$$\sum_{i=0}^{k-1} B(50; 0,3; i) \leq 0,05$$

Im Tafelwerk findet man: $k - 1 = 9$, also k = 10.